Devoir surveillé n°7
Version 2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Point fixe attractif ou répulsif.

PRÉLIMINAIRES

On se place dans le contexte suivant : f est une fonction continue, définie sur un intervalle réel I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et I est stable par f.

Pour $x_0 \in I$, on définit la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n).$$

On donne les définitions suivantes :
- On dira qu'un point fixe a de f est *stable* (ou *attractif*) si et seulement si il existe un intervalle J stable par f tel que a est à l'intérieur de J et que, pour toute condition initiale $x_0 \in J$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
- On dira qu'un point fixe a de f est *instable* (ou *répulsif*) si et seulement si il existe un intervalle J tel que a est à l'intérieur de J et que, pour toute condition initiale $x_0 \in J$ différente de a, il existe un entier $N(x_0)$ tel que :

$$x_{N(x_0)} \notin J \text{ et } \forall k < N(x_0), x_k \in J.$$

Soit a un point fixe de f et J un sous-intervalle de I contenant a dans son intérieur.

1) On suppose que sur J la distribution des signes de $f - \mathrm{Id}$ est comme dans le tableau suivant :

		a	
$f(x)-x$	-	0	+

Montrer que a est instable.

2) On suppose que sur J la distribution des signes de $f - \mathrm{Id}$ est comme dans le tableau suivant **et que f est croissante** :

		a	
$f(x)-x$	+	0	-

Montrer que a est stable.

3) On suppose maintenant que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $|f'(a)| > 1$. Montrer que a est instable.

4) On suppose maintenant que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $|f'(a)| < 1$. Montrer que a est stable.

5) Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f'(a) = 1$, que peut-il se passer ?

Venons-en maintenant au problème proprement dit :

Soit $a \in]0,1[$, la fonction f_a est définie dans $[0,+\infty[$ par $f_a(x) = a^x$. On considère des suites définies par récurrence par $x_0 \geqslant 0$ et $x_{n+1} = f_a(x_n)$.
Dans le problème, on pourra noter f au lieu de f_a pour alléger l'écriture.

PARTIE I

6) **a)** Montrer que f_a est strictement décroissante et admet un unique point fixe noté c. Comme c dépend de a, on pourra le noter c_a en cas d'ambiguïté. Que peut-on en conclure pour les suites extraites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?

b) Montrer que c est un point fixe de $f\circ f$, exprimer $(f\circ f)'(c)$ en fonction de $f'(c)$.

7) **a)** Montrer, en utilisant la stricte décroissance de f que

$$\frac{1}{\ln\frac{1}{a}} < \frac{1}{\mathrm{e}} \Leftrightarrow |f'(c)| > 1.$$

b) Que peut-on dire du point fixe c de f_a lorsque $a < \mathrm{e}^{-e}$ ou $a > \mathrm{e}^{-e}$?

PARTIE II

On pose $g(x) = f\circ f(x) - x$ et $h(x) = x + f(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

8) **a)** Montrer que pour tout $x \geqslant 0$

$$g'(x) = (\ln a)^2 a^{x+f(x)} - 1.$$

b) Montrer que h' est strictement croissante et que

$$h'(0) = 1 + \ln a, \quad g'(0) = (\ln a)^2 a - 1, \quad g(0) = a.$$

c) Préciser les limites en $+\infty$ de h', g et g'.

d) Comparer les variations de g' avec celles de h.

9) **a)** Montrer que, si $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$, h' reste strictement positif dans $[0, +\infty[$.

b) Montrer que, si $a \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$, h' s'annule dans $[0, +\infty[$ seulement au point

$$b = \frac{\ln(\ln\frac{1}{a})}{\ln(\frac{1}{a})}.$$

c) Montrer que $a < \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ entraîne $g'(b) > 0$, et que $a > \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$ entraîne $g'(b) < 0$.

10) On suppose ici $a > \frac{1}{\mathrm{e}}$. Préciser le tableau des signes de g. En déduire le comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant la valeur de x_0.

11) On suppose ici $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} < a \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$. Préciser le tableau des signes de g. En déduire le comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant la valeur de x_0.

12) On suppose $a < \mathrm{e}^{-\mathrm{e}}$.

a) Montrer que $g'(0) < 0$ et $g'(b) > 0$. En déduire la forme du tableau de variations de g. Combien g peut-elle avoir de zéros ?

b) Montrer que g s'annule exactement trois fois en des points c_1, c, c_2 avec $c_1 < c < c_2$. Montrer que $f(c_1) = c_2$ et que $f(c_2) = c_1$.

c) Préciser le comportement de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant la valeur de x_0.

II. Espace vectoriel de fonctions périodiques.

Dans tout ce problème, les espaces vectoriels considérés sont réels, et on se place dans l'espace vectoriel E des fonctions réelles ($E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).

Si $T \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathscr{P}_T$ l'ensemble des fonctions réelles T-périodiques, et $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions réelles périodiques.

On admet dans ce problème l'irrationnalité de π : $\pi \notin \mathbb{Q}$.

1) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\mathscr{P}_T$ a une structure d'espace vectoriel.

2) Écrire ensemblistement $\mathscr{P}$ en fonction des $\mathscr{P}_T$.

3) On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(x) + \cos(2\pi x)$.

- **a)** Justifier que $f \in \mathrm{Vect}(\mathscr{P})$.
- **b)** On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f \in \mathscr{P}_T$.
  - **i)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\cos(2\pi T) - 1 = 2 \sin\left(\frac{T}{2}\right) \sin\left(n + \frac{T}{2}\right)$.
  - **ii)** En déduire que $\sin\left(\frac{T}{2}\right) = 0$, puis que T est un multiple de 2π.
  - **iii)** Que vaut $\cos(2\pi T)$? Que dire de T ? En déduire une contradiction.
- **c)** Est-ce que $f \in \mathscr{P}$? Est-ce que $\mathscr{P}$ a une structure d'espace vectoriel ?

4)
- **a)** Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \mid m$. De manière générale, a-t-on $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_m$? $\mathscr{P}_m \subset \mathscr{P}_n$?
- **b)** Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un entier p vérifiant $\mathscr{P}_n \cup \mathscr{P}_m \subset \mathscr{P}_p$.
- **c)** Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathscr{P}_n$ a une structure d'espace vectoriel.

5)
- **a)** Montrer que $C = \displaystyle\bigcap_{T \in \mathbb{R}_+^*} \mathscr{P}_T$ est l'ensemble des fonctions constantes. Est-ce un espace vectoriel ?
- **b)** Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, on note $Z_T = \{ f \in \mathscr{P}_T \mid f(0) = 0 \}$.
  - **i)** Montrer que Z_T est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}_T$.
  - **ii)** Montrer que Z_T et C sont supplémentaires dans $\mathscr{P}_T$.

— FIN —