Devoir surveillé n° 7
Version 1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Approximation de la constante d'Euler.

Le théorème des accroissements finis intervient à plusieurs reprises dans ce problème. Vous devrez préciser chaque fois clairement pour quelle fonction et entre quelles bornes vous l'utilisez.

Ce problème a pour objet l'étude de la constante d'Euler notée γ.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n.$$

Partie I

1) Prouver pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'encadrement : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln \dfrac{k+1}{k} \leqslant \dfrac{1}{k}$.

2) **a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 1$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

On note dorénavant γ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (*constante d'Euler*).

3) Montrer que $\gamma \leqslant 1$.

4) **a)** Étudier, sur l'intervalle $[k, k+1]$ ($k \in \mathbb{N}^*$), le signe de la fonction f_k définie par

$$f_k(x) = \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)(x-k) - \frac{1}{x}.$$

b) En déduire le signe de $\displaystyle\int_k^{k+1} f_k(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Prouver l'inégalité : $\ln \dfrac{k+1}{k} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1}\right) \qquad (\star)$.

5) **a)** Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

b) En déduire, en sommant $(\star)$, que $\dfrac{1}{2} \leqslant \gamma$.

Partie II

6) On définit les fonctions g_1 et g_2 sur $]0,+\infty[$ par :

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -\frac{1}{x+1} + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x^2} \\ g_2(x) &= g_1(x) + \frac{2}{3x^3} \end{aligned}$$

Étudier les variations de g_1 et g_2 sur $]0,+\infty[$ et en déduire le signe de chacune.

7) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $u_n - u_{n+1}$ en fonction de $g_1(n)$ et de n.

8) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $\dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{2}{3n^3} \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2n^2}$.

9) Dans cette question $n \geqslant 2$ et $p \geqslant n$.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ entre k et $k+1$ (k entier), former un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^2}$.

b) Former par une méthode analogue à celle de la question précédente un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{k^3}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} \leqslant \frac{1}{(n-1)^2}.$$

d) En déduire $\dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{3(n-1)^2} \leqslant u_n - \gamma \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$.

10) Un calcul numérique donne $u_{100} \in [0,582207; 0,582208]$. Donner une valeur approchée de γ à 10^{-4} près.

II. Espace vectoriel de fonctions périodiques.

Dans tout ce problème, les espaces vectoriels considérés sont réels, et on se place dans l'espace vectoriel E des fonctions réelles ($E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).

Si $T \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\mathscr{P}_T$ l'ensemble des fonctions réelles T-périodiques, et $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions réelles périodiques.

On admet dans ce problème l'irrationnalité de π : $\pi \notin \mathbb{Q}$.

1) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\mathscr{P}_T$ a une structure d'espace vectoriel.

2) Écrire ensemblistement $\mathscr{P}$ en fonction des $\mathscr{P}_T$.

3) On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(x) + \cos(2\pi x)$.

a) Justifier que $f \in \mathrm{Vect}(\mathscr{P})$.

b) On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f \in \mathscr{P}_T$.

i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\cos(2\pi T) - 1 = 2\sin\left(\dfrac{T}{2}\right)\sin\left(n + \dfrac{T}{2}\right)$.

ii) En déduire que $\sin\left(\dfrac{T}{2}\right) = 0$, puis que T est un multiple de 2π.

iii) Que vaut $\cos(2\pi T)$? Que dire de T ? En déduire une contradiction.

c) Est-ce que $f \in \mathscr{P}$? Est-ce que $\mathscr{P}$ a une structure d'espace vectoriel ?

4) **a)** Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n \mid m$. De manière générale, a-t-on $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_m$? $\mathscr{P}_m \subset \mathscr{P}_n$?

b) Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un entier p vérifiant $\mathscr{P}_n \cup \mathscr{P}_m \subset \mathscr{P}_p$.

c) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathscr{P}_n$ a une structure d'espace vectoriel.

5) **a)** Montrer que $C = \displaystyle\bigcap_{T\in\mathbb{R}_+^*} \mathscr{P}_T$ est l'ensemble des fonctions constantes. Est-ce un espace vectoriel ?

b) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, on note $Z_T = \{\, f \in \mathscr{P}_T \mid f(0) = 0 \,\}$.

i) Montrer que Z_T est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}_T$.

ii) Montrer que Z_T et C sont supplémentaires dans $\mathscr{P}_T$.

— FIN —