Devoir surveillé n° 6
Version 1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$.

II. Polynômes de Tchebychev.

On définit la suite de polynômes de Tchebychev, notée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$, par :

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = X, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

On dit qu'un polynôme P est pair si $P(-X) = P$, impair si $P(-X) = -P$.

1) **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n a pour coefficient dominant 2^{n-1}.
c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de même parité que n.
d) Calculer $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
e) Soit $x \in \mathbb{R}$, quelle relation de récurrence vérifie la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire la valeur de $P_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On discutera les trois cas suivants.
i) Si $|x| > 1$.
ii) Si $|x| = 1$.
iii) Si $|x| < 1$.

2) **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.
b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation : $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.
c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n.
d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toutes les racines de P_n'.

3) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \wedge P_{n+1} = 1$.

4) Écrire dans le langage Python une fonction `Tchebychev(n)`, prenant en argument un entier naturel `n` et renvoyant la liste des coefficients de $P_{\mathtt{n}}$.
Ainsi, `Tchebychev(2)` renverra `[2,0,-1]`, car $P_2 = 2X^2 - 1$.
Il sera apprécié que chaque boucle soit accompagnée de son invariant.

III. Une équation fonctionnelle.

Partie 1 : endomorphismes continus de $(\mathbb{R},+)$.

On veut montrer que l'ensemble des homothéties de $\mathbb{R}$ est égal à l'ensemble $\mathscr{E}$ des endomorphismes continus du groupe additif $(\mathbb{R},+)$, c'est-à-dire des fonctions **continues** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1) Soit $f \in \mathscr{E}$.

- **a)** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(kx) = kf(x)$.
- **b)** On pose $\lambda = f(1)$. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \lambda x$.
  Indication : si $x \in \mathbb{Q}$, on pourra multiplier x par un entier pour obtenir un entier et utiliser la question précédente.

2) Conclure.

Partie 2 : une équation fonctionnelle.

On veut maintenant déterminer l'ensemble $\mathscr{E}'$ des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ **continues en 0** vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}. \qquad (\spadesuit)$$

En particulier, cela signifie que $\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ 1 + f(x)f(y) \neq 0$.

3) Quelles sont les fonctions constantes de $\mathscr{E}'$?

4) Soit f un élément de $\mathscr{E}'$ pour lequel il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x_0)| = 1$. Montrer que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

5) Soit f un élément de $\mathscr{E}'$ qui n'est **pas** une fonction constante.

- **a)** Montrer que $f(0) = 0$. Étudier la parité de f.
- **b)** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- **c)** En déduire que, pour tout réel x, on a $|f(x)| < 1$.
- **d)** Justifier que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J qu'on précisera. On note Argth sa réciproque.
- **e)** On pose : $g : x \mapsto \mathrm{Argth}(f(x))$. Justifier l'existence et la continuité de g sur $\mathbb{R}$.
- **f)** Vérifier que la fonction th est un élément de $\mathscr{E}'$.
- **g)** En déduire que g est un élément de $\mathscr{E}$.

6) Donner l'expression des fonctions non constantes de $\mathscr{E}'$.

7) Conclure en donnant une description complète de $\mathscr{E}'$.

— FIN —