Devoir surveillé n°5

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

CONSIGNES : Les problèmes I et III sont à traiter par tous les élèves. Pour le problème II, vous choisirez le problème IIv1 (plus facile) OU le problème IIv2 (plus difficile), MAIS PAS LES DEUX ! !

I. Entiers de Gauss.

On définit l'ensemble des *entiers de Gauss* : $\mathbb{Z}[i] = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$.
Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on définit $N(a + ib) = a^2 + b^2$.

1) Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif.

On rappelle qu'un élément $z \in \mathbb{Z}[i]$ est inversible s'il existe $y \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zy = 1$.

2) **a)** Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, $N(xy) = N(x)N(y)$.
b) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, z est inversible si et seulement si $N(z) = 1$.
c) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?

On rappelle aussi que, si $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, alors x divise y (ou est un diviseur de y) s'il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $y = zx$. On appelle *élément irréductible* de $\mathbb{Z}[i]$ tout élément non inversible de $\mathbb{Z}[i]$ qui ne peut s'écrire comme produit de deux éléments non inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

3) **a)** Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$, supposons que $N(z)$ est un nombre premier. Montrer que z est irréductible.
b) La réciproque est elle vraie ?
c) Soit p un nombre premier. Montrer que p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si p ne s'écrit pas comme la somme de carrés de deux entiers.
d) Déterminer l'ensemble des diviseurs de $1 - 3i$.

4) Division euclidienne sur $\mathbb{Z}[i]$.
a) Montrer que tout nombre réel est à distance au plus $\dfrac{1}{2}$ d'un entier.
En déduire que si $z \in \mathbb{C}$, on peut trouver $q \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $|z - q| < 1$.
b) En déduire que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, avec $b \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $a = bq + r$ ainsi que $N(r) < N(b)$.
Indication : On pourra considérer $\dfrac{a}{b}$.
c) Y a-t-il unicité de cette écriture ?

IIv1. Suites récurrentes.

Le but de l'exercice est l'étude des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ définies par $0 < x_0 < y_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n^{\frac{2}{3}}\, y_n^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = x_n^{\frac{1}{3}}\, y_n^{\frac{2}{3}}.$$

1) **a)** Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 0$, $x_n > 0$ et $y_n > 0$.
On peut donc définir les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par : $\forall n \geqslant 0$, $u_n = \ln(x_n)$ et $v_n = \ln(y_n)$.

b) Prouver que : $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n$.

2) Dans cette question on considère la suite $(w_n)_n$ définie par : $\forall n \geqslant 0,\ w_n = v_n - u_n$.

a) Prouver que $w_0 = \ln\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$.

b) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) En déduire l'expression de $(w_n)_n$ puis calculer sa limite.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$.

4) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

5) **a)** Démontrer que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent et ont la même limite ℓ.

b) Prouver que $\ell > 0$.

c) En étudiant la suite produit $(x_n\, y_n)_n$, déterminer ℓ en fonction de x_0 et y_0.

IIv2. Limites inférieures et supérieures d'une suite bornée.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'ensemble $\{\, u_k \mid k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n \,\}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n possède une borne inférieure (notée m_n) ainsi qu'une borne supérieure (notée M_n).

b) Montrer que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$.

c) En déduire que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

On appelle alors *limite inférieure* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$, le réel $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$.

De même, on appelle *limite supérieure* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$, le réel $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

Comme on vient de le voir : $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

L'intérêt de ces notions est que toute suite bornée possède une limite inférieure et une limite supérieure, alors que toute suite bornée ne possède pas forcément une limite au sens usuel.

2) **a)** On suppose que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$. Montrer qu'alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) Réciproquement, montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Indication : Ne pas hésiter à utiliser des ε.

3) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une nouvelle suite réelle bornée. On suppose que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $k \geqslant n$ on a $m_n \leqslant v_k$.

b) En déduire que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \liminf\limits_{n\to+\infty} v_n$.

On montrerait de même l'inégalité $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} v_n$.

III. Une suite implicite.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction

$$\varphi_n : x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n.$$

On considère aussi la fonction

$$\psi : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{\,x}.$$

1) Question préliminaire. Montrer que pour tout $\lambda > 0$:

$$\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\,\lambda}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, dresser le tableau des variations de φ_n sur $\mathbb{R}_+$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\varphi_n(x) = 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

On note dorénavant x_n l'unique réel positif vérifiant $\varphi_n(x) = 1$: on vient donc de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1+\dfrac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant 1+\dfrac{2}{n}$.

5) Que peut-on en déduire sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

6) Montrer que l'équation $\psi(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on notera dorénavant α.

7) Justifier que $1 < \alpha < 2$.

8) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\varphi_n\left(1+\dfrac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi(\lambda)$.

9) Soit $\varepsilon \in]0, \alpha-1[$.

- **a)** Comparer $\psi(\alpha-\varepsilon)$, $\psi(\alpha)$ et $\psi(\alpha+\varepsilon)$.
- **b)** Justifier qu'il existe un rang n_0 à partir duquel on ait

$$\varphi_n\left(1+\frac{\alpha-\varepsilon}{n}\right) < 1 < \varphi_n\left(1+\frac{\alpha+\varepsilon}{n}\right).$$

- **c)** Justifier qu'à partir d'un certain rang,

$$1+\frac{\alpha-\varepsilon}{n} < x_n < 1+\frac{\alpha+\varepsilon}{n}.$$

10) Que peut-on donc dire sur la suite de terme général $n(x_n-1)$?

— FIN —