Devoir surveillé n°5

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Suite de Fibonacci.

La suite (u_n) (**suite de Fibonacci**) est définie par

$$u_0 = 1 \ ; \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ .$$

1) Résoudre cette relation de récurrence et donner une expression de u_n en fonction de n.

Dans toute la suite on n'utilisera plus les résultats de la question précédente.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$. Que peut-on en déduire quant à la limite de (u_n) ?

5) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.
Indication : On pourra introduire la suite $a_n = u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -a_n$.

6) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

7) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, puis $x_n = v_{2n}$ et $y_n = v_{2n+1}$.

a) Démontrer la relation $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ pour tout entier naturel n.

b) Démontrer la relation $v_{n+2} - v_n = \dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

d) En déduire que la suite (v_n) converge. Quelle est sa limite ?

II. Équation de Pell-Fermat

On appelle équation de Pell-Fermat toute équation de la forme $x^2 - dy^2 = 1$ où les inconnues x et y sont des entiers, et où $d \in \mathbb{N}$ n'est pas un carré parfait. Nous allons résoudre cette équation pour $d = 7$. Cette méthode pourrait se généraliser à n'importe quelle valeur de d.

On note $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ l'ensemble $\left\{ a + b\sqrt{7} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

1) **a)** Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

b) Montrer aussi que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est stable par la loi $\times$, puis en déduire que $(\mathbb{Z}[\sqrt{7}], +, \times)$ est un anneau commutatif.

2) **a)** Montrer que $\sqrt{7}$ est irrationnel.

b) Montrer

$$\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \quad \exists!(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad x = a + b\sqrt{7}$$

L'élément $a - b\sqrt{7}$ de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est appelé *conjugué* de $x = a + b\sqrt{7}$ et est noté $\overline{x}$ (ne pas le confondre avec le conjugué complexe !).

c) On considère l'application $\varphi \; : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{7}] & \to & \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$. Montrer que φ est un endomorphisme d'anneaux.

3) Pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, on pose $N(x) = x\overline{x}$. Ce réel est appelé *norme* de x.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, $N(x) \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que pour tout $x, x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, $N(xx') = N(x)N(x')$.

c) Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Montrer que x est inversible si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

d) On pose $G = \left\{ x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \;\middle|\; N(x) = 1 \right\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe.

e) Expliquer en quoi la détermination des éléments de G est équivalente à la détermination des solutions entières de l'équation $x^2 - 7y^2 = 1$.

4) Soit $x \in G \cap]1, +\infty[$. On note $x = a + b\sqrt{7}$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) Calculer $x + \overline{x}$ et en déduire que $a > 0$.

b) Montrer que $x^2 = 1 + 2bx\sqrt{7}$ et en déduire que $b > 0$.

c) Montrer que $b \geqslant 3$ et $a \geqslant 8$.

d) En déduire que $G \cap]1, +\infty[$ contient un plus petit élément $x_0 = a_0 + b_0\sqrt{7}$ pour l'ordre naturel sur $\mathbb{R}$.

e) Montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $x_0^n \leqslant x < x_0^{n+1}$.

f) En déduire que $x = x_0^n$.

g) Montrer finalement que $G = \{ \pm x_0^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$.

5) En déduire toutes les solutions de l'équation $x^2 - 7y^2 = 1$.

— FIN —