Devoir surveillé n°4

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On définit l' application :

$$f : \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^2 \end{array} \right.$$

1) Étude de l'injectivité de f

- **a)** On pose $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $f(R)$ et $f(S)$.
- **b)** L'application f est-elle injective ? Justifier.

2) Étude de la surjectivité de f

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $M^2 = D$ où $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- **a)** Prouver que M et D commutent.
- **b)** En déduire M est une matrice diagonale.
- **c)** Conclure concernant les solutions de l'équation $M^2 = D$.
- **d)** L'application f est-elle surjective ? Justifier.

3) Étude de $f^{\leftarrow}(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$

- **a)** Rappeler la définition d'une matrice symétrique et antisymétrique. On note $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques.
- **b)** Prouver que si une matrice S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est symétrique alors $f(S)$ est aussi symétrique.
- **c)** Prouver que $f(\mathcal{A}_2(\mathbb{R})) \subset \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. A-t-on $f^{\leftarrow}(\mathcal{S}_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$?

II. Distance à un ensemble.

Dans ce problème, on travaille indifféremment avec la distance entre deux nombres réels (la valeur absolue) et la distance entre deux nombres complexes (le module). On considère donc que $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$.
Pour une partie A non vide de E et un élément x de E, on définit la *distance de x à A* comme

$$d(x, A) = \inf \{|x - a| \ ; \ a \in A\}.$$

L'objet de ce problème est d'étudier cette notion sur quelques exemples puis d'en dégager quelques propriétés.

1) Question de cours : Soit $B \subset \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Rappeler une condition nécessaire et suffisante sous laquelle B admet une borne inférieure. Sous cette condition, montrer que $y = \inf(B)$ si et seulement si

$$\forall b \in B, \ y \leqslant b \ \text{ et } \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists b \in B, \ b < y + \varepsilon.$$

2) Montrer que la borne inférieure apparaissant dans la définition de $d(x, A)$ est bien définie.

3) Exemples réels. Dans cette partie, $E = \mathbb{R}$.

  a) On prend $A = \{0\}$. Déterminer $d(x, A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

  b) On prend $A = \mathbb{Q}$. Déterminer $d(x, A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Exemples complexes : *on pourra penser à faire des dessins (éventuellement au brouillon) et l' on choisira soigneusement la forme sous laquelle on exprime les nombres complexes manipulés.* Dans cette partie, $E = \mathbb{C}$.

  a) On prend $A = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ (demi-plan de Poincaré). Déterminer $d(x, A)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

  b) On prend $A = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| \leqslant 1\}$ (disque unité). Déterminer $d(x, A)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$.

5) Soit $A \subset E$ non vide et $x \in E$. Quelle relation y a-t-il entre les propositions «$x \in A$» et «$d(x, A) = 0$» ?

6) Soit $A \subset B \subset E$ non vides. Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x, B) \leqslant d(x, A)$.

7) Soit $A \subset E$ non vide, soit $x, y \in E$. Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x - y|$.

8) Dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et pour $A \subset E$ non vide, en déduire que la fonction $x \mapsto d(x, A)$ est continue.

III. Une équation de Mordell.

On cherche déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation (de Mordell) suivante :

$$y^2 = x^3 + 16. \tag{$\mathscr{M}$}$$

On désigne par *cube parfait* tout cube d'entier. Ainsi, un entier $a \in \mathbb{Z}$ est un cube parfait s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a = n^3$.

1) Résultats préliminaires. Ces deux questions sont indépendantes, et leurs résultats pourront être utilisées dans le reste du devoir.

  a) Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a est pair si et seulement si a^2 est pair et que a est pair si et seulement si a^3 est pair.

  b) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers premiers entre eux, tels que ab soit un cube parfait. Montrer que a et b sont des cubes parfaits.

  Indication : On pourra partir de la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre dont ab est le cube.

2) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $(\mathscr{M})$ tel que y soit impair.

  a) Montrer que y^2 est impair et en déduire que x est impair.

  b) Soit d un diviseur de $y - 4$ et de $y + 4$. Montrer que d est impair et que d divise 8.

  c) En déduire que $y - 4$ et $y + 4$ sont premiers entre eux.

  d) En déduire qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $y + 4 = a^3$ et $y - 4 = b^3$.

  e) Montrer que $a - b$ est pair et que $a^2 + ab + b^2$ est impair.

  f) En factorisant $a^3 - b^3$, montrer que $a = b + 8$ et $3b^2 + 24b + 64 = 1$.

  g) Conclure en donnant l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $(\mathscr{M})$ tel que y soit impair

3) Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de $(\mathscr{M})$ tel que y soit pair.

  a) Montrer que si $y \equiv 0[4]$ alors $y^2 \equiv 0[16]$, et si $y \equiv 2[4]$ alors $y^2 \equiv 4[16]$.

  b) En démontrant des résultats analogues concernant x^3, montrer que x et y sont divisibles par 4.

  On note alors $x = 4x'$ et $y = 4y'$.

  c) Montrer que y' est impair.

  On note alors $y' = 2n + 1$.

  d) Montrer que n et $n + 1$ sont premiers entre eux et sont des cubes parfaits.

  On note alors $n = c^3$ et $n + 1 = d^3$.

  e) Montrer que $d = c + 1$, et en déduire les valeurs de n, y', x', y et x.

4) Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de $(\mathscr{M})$.

— **FIN** —