DS n°3 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : Note :

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Calculs d'intégrales et de primitives

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos^4(x)}\,\mathrm{d}x = \qquad (1)$$

$$\int_0^{1} (2x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x = \qquad (2)$$

$$\int_0^{1/2} \mathrm{Arcsin}(x)\,\mathrm{d}x = \qquad (3)$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{3\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = \qquad (4)$$

Équations différentielles

On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $y' + \mathrm{th}(x)y = x$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{E})$ est

(5)

et une solution particulière de $(\mathscr{E})$ est

. (6)

L'unique solution de $(\mathscr{E})$ vérifiant $y(1) = 0$ est

. (7)

On considère l'équation différentielle $(\mathscr{F}) : y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{2x}$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à $(\mathscr{F})$ est

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{8}$$

et une solution particulière de $(\mathscr{F})$ est

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{9}$$

Ensembles, applications

Compléter : $$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{\varnothing\})) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{10}$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \end{array}$.

Cette application est-elle injective (répondre «**Oui**» ou «**Non**») ? $$\boxed{\qquad\qquad} \tag{11}$$

Déterminer l'image de f : $$\mathrm{Im}(f) = \boxed{\qquad\qquad\qquad}. \tag{12}$$

Déterminer un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel f réalise une bijection sur son image (*i.e.* f réalise une bijection de I sur $\mathrm{Im}(f)$).

$$I = \boxed{\qquad\qquad\qquad}. \tag{13}$$

Calcul matriciel

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Avec $B = A - \mathrm{I}_3$, calculer : $$A^{42} = \boxed{\qquad\qquad\qquad} \tag{14}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. On admet que cette matrice est inversible, calculer son inverse :

$$A^{-1} = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \tag{15}$$

— FIN —