Devoir surveillé n°3

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Soit E et F deux ensembles non vides, $f : E \to F$ une application et $\mathcal{S} = \{X \subset E \mid f^{\leftarrow}(f(X)) = X\}$. Pour C un ensemble, on note $\mathcal{P}(C)$ l'ensemble des parties de C.

1) Pour $A \subset E$, montrer que $A \subset f^{\leftarrow}(f(A))$.

2) Pour $A \subset E$, montrer que $f^{\leftarrow}(f(A)) \in \mathcal{S}$.

3) Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par intersection et réunion.

4) Soit $X \in \mathcal{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \varnothing$. Montrer que $X \cap f^{\leftarrow}(f(A)) = \varnothing$.

5) Soit $X, Y \in \mathcal{S}$. Montrer que $E \backslash X$ et $Y \backslash X$ appartiennent à $\mathcal{S}$.

6) Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{S} & \to & \mathcal{P}(f(E)) \\ A & \mapsto & f(A) \end{cases}$ est une bijection.

II. Une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle

$$y'' + \frac{2y'}{\operatorname{th}(x)} + y = 0. \qquad (\mathscr{E})$$

1) *Question préliminaire.* Justifier que $\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

2) Sur quel ensemble E peut-on chercher à résoudre $(\mathscr{E})$? Écrire cet ensemble comme une union d'intervalles ouverts.

3) Soit $y : E \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation $(\mathscr{E})$. On pose alors

$$z : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y'(x) + \dfrac{y(x)}{\operatorname{th}(x)} \end{array}.$$

a) Montrer que z est solution de l'équation différentielle linéaire :

$$z' + \frac{z}{\operatorname{th}(x)} = 0. \qquad (\mathscr{F})$$

b) Résoudre l'équation $(\mathscr{F})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Résoudre l'équation $(\mathscr{F})$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Indication : on essaiera de chercher un argument rigoureux évitant de dupliquer les arguments donnés pour résoudre la question précédente.

d) En déduire qu'il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{a'x+b'}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

e) Réciproquement, montrer que toutes les fonctions de cette forme sont bien solution de $(\mathscr{E})$.

4) Parmi les solutions de $(\mathscr{E})$, lesquelles admettent-elles une limite finie en 0 ? Le cas échéant, laquelle ?

III. Étude d'une fonction complexe.

On considère la fonction complexe

$$f : z \mapsto \frac{z+1}{\bar{z}+2}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de f, que l'on notera Δ_f.

2) **a)** Soit $z \in \Delta_f$. Montrer que $|f(z)| = 1$ si et seulement si $|z+1| = |z+2|$.

b) En déduire une expression explicite de $f^{\leftarrow}(\mathbb{U})$.

3) Montrer que $f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \Delta_f \cap \left(\mathbb{R} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Re}(z) = -\dfrac{3}{2} \right\} \right)$.

4) **a)** Pour chaque $z \in f^{\leftarrow}(\mathbb{R})$, que vaut $f(z)$? Déterminer alors $f(f^{\leftarrow}(\mathbb{R}))$.

b) L'application $f : \Delta_f \to \mathbb{C}$ est-elle injective ? Bijective ?

5) Résoudre l'équation $f(z) = 1$. Que peut-on en déduire ?

Dans la suite du problème, on considèrera la fonction $g = f_{|\mathbb{U}}$, c'est-à-dire

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{U} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z+1}{\bar{z}+2} \end{array}.$$

6) Soit u un nombre complexe de module 1, justifier que $g(u) = \dfrac{u^2+u}{2u+1}$.

7) **a)** Résoudre pour $u \in \mathbb{U}$ l'équation $g(u) = \dfrac{1+3i}{5}$.

b) Résoudre pour $u \in \mathbb{U}$ l'équation $g(u) = i$.

8) L'application g est-elle surjective ?

9) **a)** Soit $u \in \mathbb{U}$, soit $t \in]-\pi, \pi]$ vérifiant $u = e^{it}$. On pose

$$v = \frac{u+1}{2u+1}.$$

Exprimer $|v|^2$ en fonction de $\cos(t)$ (uniquement !).

b) Étudier sur $]-\pi, \pi]$ la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1+\cos(t)}{5+4\cos(t)}$.

c) Conclure quant à l'injectivité de g.

— **FIN** —