Devoir surveillé n°2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Homographies du plan complexe.

On introduit les parties de $\mathbb{C}$ suivantes :

— le cercle unité : $\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = \left\{ \mathrm{e}^{i\theta} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$;

— le disque ouvert délimité par ce cercle : $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;

— le demi-plan de Poincaré : $\mathscr{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifiant $ad - bc \neq 0$. L'homographie définie par $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ est la fonction h qui à tout nombre complexe z tel que $cz + d \neq 0$, associe $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

Partie 1 : Exemples

1) Soit h l'homographie définie par $h(z) = i\dfrac{1+z}{1-z}$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$, $h(z) \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{D}$, $h(z) \in \mathscr{P}$.

c) Déterminer les *points fixes* de h, *i.e.* les nombres complexes z tels que $h(z) = z$.

d) Pour quel(s) nombre(s) complexe(s) Z l'équation $h(z) = Z$, d'inconnue z, possède-t-elle une solution sur $\mathbb{C}$?

2) Soit g l'homographie définie par $g(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$.

a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{R}$, $g(z) \in \mathbb{U}$.

b) Montrer que, pour tout $z \in \mathscr{P}$, $g(z) \in \mathscr{D}$.

Partie 2 : Homographies conservant $\mathbb{U}$

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et h l'homographie définie par $h(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{z}$.

Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

4) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{U}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et h la fonction définie par $h(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\dfrac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}$.

a) Montrer que h est une homographie, bien définie sur $\mathbb{U}$.

b) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

5) Réciproquement, nous allons montrer que les homographies précédentes sont les seules à vérifier : $\forall z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$. Établissons deux résultats préliminaires.

a) Montrer que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta)$.

b) Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que si, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $a + 2\operatorname{Re}\left(b\mathrm{e}^{-i\theta}\right) = 0$, alors $a = b = 0$.

6) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tel que $ad - bc \neq 0$ et h l'homographie définie par $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ vérifiant, pour tout $z \in \mathbb{U}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.

a) Établir que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\bar{a}b\mathrm{e}^{-i\theta}\right) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\bar{c}d\mathrm{e}^{-i\theta}\right).$$

b) En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et que $\bar{a}b = \bar{c}d$.

c) Si $a = 0$, que peut-on dire de h ?

d) On suppose dorénavant que $a \neq 0$. Montrer que

$$\left(|a|^2 - |c|^2\right)\left(|a|^2 - |d|^2\right) = 0.$$

e) Le cas $|a| = |c|$ est-il possible ?

f) Que peut-on dire si $|a| = |d|$? Conclure.

II. La série harmonique.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On étudie dans ce problème diverses propriétés de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, nommée aussi *série harmonique.*

I – Limite de la série harmonique.

1) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_{n+1} en fonction de H_n. En déduire le sens de variation de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la quantité $H_{2n} - H_n$, en l'écrivant à l'aide d'un seul symbole Σ.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{2^n} \geqslant \dfrac{n}{2} + 1$.

5) La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet-elle une limite ? Laquelle ?

II – Une propriété arithmétique : si $n \geqslant 2$, H_n n'est pas entier.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, posons la propriété

$$P_n : \text{« il existe } p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } H_n = \frac{2p+1}{2q} \text{ ».}$$

6) Montrer que, si $n \geqslant 2$ est pair, alors $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

7) Montrer que si p, q sont deux entiers naturels impairs, et k, ℓ deux entiers naturels quelconques $\dfrac{k}{p} + \dfrac{\ell}{q}$ peut s'écrire comme un quotient dont le dénominateur est impair.

8) En déduire que, si n est impair (que l'on écrit donc $n = 2m+1$), il existe un nombre rationnel r de dénominateur impair tel que

$$H_{n+1} = \frac{H_{m+1}}{2} + r.$$

Indication : on pourra décomposer une somme écrite en fonction de la parité de ses indices.

9) Montrer finalement par un raisonnement par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$, P_n est vraie.

III – Quelques relations.

10) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que :

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i} = \sum_{k=1}^{n-1} H_k.$$

11) Déterminer deux nombres a, b vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+2},$$

et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression simplifiée de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

12) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une forme simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)}$.

Indication : on pourra effectuer une opération similaire à celle effectuée précédemment.

— FIN —