Devoir surveillé n°1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1, tels que $1 + z_1 z_2 \neq 0$. Montrer que

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}.$$

II. Autour de π.

1) On pose $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}.$$

On pose aussi, pour tout $x \in I$,

$$u(x) = f(x) - x \quad \text{et} \quad v(x) = g(x) - x.$$

a) Factoriser le polynôme $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$ en produit de polynômes réels.

b) Justifier que u est dérivable sur I et que, pour tout $x \in I$,

$$u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}.$$

c) En déduire les variations de u sur I.

d) Justifier que v est dérivable sur I et déterminer un polynôme réel Q tel que, pour tout $x \in I$,

$$v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2 + \cos(x))^2}.$$

e) En déduire les variations de v sur I.

f) Montrer que, pour tout $x \in I$, $g(x) < x < f(x)$.

2) **a)** En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

b) Déduire de la question **1)f)** un encadrement de π.

3) On pose, pour tout entier naturel n,

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$

a) Justifier que, pour tout réel θ, $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - b_n}{2}} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + b_n}{2}}.$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

d) Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers $+\infty$.

Indication : On pourra déterminer la limite de (b_n) et, pour (a_n), utiliser la limite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0.

III. Involutions continues de $\mathbb{R}$.

L'objectif de ce problème est de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et *involutives* (ou qui sont des *involutions*), c'est-à-dire vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, ce qui signifie que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = x.$$

On admettra le *théorème de la limite monotone* : toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone admet une limite en $+\infty$ ainsi qu'en $-\infty$, finie ou infinie.

1) Donner deux exemples différents d'une telle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, involutive et continue.

2) On considère une telle fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, involutive et continue. Montrer que f est *injective*, c'est-à-dire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$.

3) On montre maintenant que f est strictement monotone, en raisonnant par l'absurde. Supposons donc dans cette question que f n'est pas strictement monotone.

a) Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d vérifiant $a < b$, $c < d$, $f(a) \leqslant f(b)$ et $f(c) \geqslant f(d)$.

b) En considérant les fonctions

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1-t)a + tc \end{array} \right. , \quad \beta : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1-t)b + td \end{array} \right.$$

et

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(\alpha(t)) - f(\beta(t)) \end{array} \right. ,$$

ainsi qu'en exploitant la continuité de f, montrer qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ vérifiant $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$.

c) En déduire une contradiction et conclure que f est strictement monotone.

On considère donc maintenant une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ involutive, continue et strictement monotone.

4) Montrer que si f est strictement croissante, alors $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (on pourra raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq f(x)$).

5) On suppose dans cette question que f est strictement décroissante. On considère $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} - f$, c'est-à-dire

$$g : x \mapsto x - f(x).$$

a) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$.

b) En déduire que f n'est pas majorée. On montrerait de même que f n'est pas minorée (on ne demande pas de le montrer, et on pourra utiliser ce résultat).

c) Tracer le tableau des variations de f.

d) Construire le tableau des variations de g, et montrer que g admet une réciproque, dont on donnera aussi le tableau des variations.

e) Montrer que $f = g^{-1} \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \circ g$.

6) Réciproquement, considérons une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, strictement croissante et vérifiant

$$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty.$$

Montrer que $g^{-1} \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \circ g$ est une involution, continue et strictement décroissante.

7) Exhiber une infinité d'involutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.

— **FIN** —