

Devoir à la maison n° 23

À rendre le 9 juin

- 1) Question préliminaire : soit (u_n) une suite réelle tendant vers 0. Justifier le développement :

$$\ln(1 + u_n) = u_n + \mathcal{O}(u_n^2).$$

- 2) Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs, telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{1 + a/n + \mathcal{O}(1/n^2)}$$

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(n^a u_n)$, ainsi que la série de terme général $w_n = v_{n+1} - v_n$.

a) Donner un développement de w_n à la précision $\mathcal{O}(1/n^2)$.

b) Quelle est la nature de la série $\sum w_n$?

c) En déduire la nature de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

d) Montrer alors qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^a}$.

e) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Remarque : le résultat ainsi démontré est appelé *règle de Raab-Duhamel*.

- 3) Application :

Soit a et b deux réels positifs tels que $(b - a) > 1$. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, (n + b)u_{n+1} = (n + a)u_n.$$

a) Donner la nature de la série de terme général u_n en appliquant la règle de Raab-Duhamel.

b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

— FIN —