Devoir à la maison n° 17

À rendre le 1 avril

L'objectif de ce problème est de montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, ce symbole de sommation étant à comprendre comme voulant dire

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour tout $N \geqslant 1$, on note $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.

1) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer que

$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right) \mathrm{d}t \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Indication : on pourra procéder par intégration par parties.

2) On pose $A_N(t) = \displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nt)$. Montrer que pour tout $t \in]0, \pi]$:

$$A_N(t) = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Que dire de cette relation pour $t = 0$?

3) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

4) En déduire que pour tout $N \geqslant 1$,

$$\int_0^\pi (at^2 + bt) A_N(t) \,\mathrm{d}t = S_N - \frac{\pi^2}{6}.$$

5) Montrer que $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dfrac{\pi^2}{6}$.

Indication : on justifiera proprement que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{at^2 + bt}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ vérifie les hypothèses de la première question.

6) Soit $\alpha > 1$.

a) Comparer pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

b) En déduire pour tout $N \geqslant 1$ et $p > N$ un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{p} \frac{1}{n^\alpha}$ par deux intégrales, que vous calculerez.

c) Soit $N \geqslant 1$. En déduire l'existence de la limite lorsque p tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{p} \frac{1}{n^\alpha}$.

d) On note dorénavant $\displaystyle R_N(\alpha) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{p} \frac{1}{n^\alpha}$.

Déduire des encadrements précédents que $\displaystyle R_N(\alpha) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$.

7) Montrer que

$$S_N \underset{N\to+\infty}{=} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

— **FIN** —