Devoir à la maison n° 16

À rendre le 25 mars

Le but du problème est de montrer que le nombre π est irrationnel.

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $2n$. On considère les applications F et G suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$F : x \mapsto F(x) = P(x) - P''(x) + P^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n \, P^{(2n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, P^{(2k)}(x) \; ;$$

$$G : x \mapsto G(x) = F'(x) \, \sin x - F(x) \, \cos x \, .$$

1) Montrer que $F + F'' = P$.

2) Calculer $G'(x)$. En déduire que $\displaystyle\int_0^\pi P(x) \, \sin x \, \mathrm{d}x = F(0) + F(\pi)$.

On suppose désormais que π est un nombre rationnel, et on écrit $\pi = \dfrac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels strictement positifs. Dans tout ce qui suit, le polynôme P est donné par

$$P(X) = \frac{1}{n!} \, X^n \, (a - bX)^n \, .$$

3) On pose $Q = X^n$ et $R = (a - bX)^n$. Donner les expressions de $Q^{(j)}$ et $R^{(j)}$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, puis pour tout $j > n$.

4) Montrer que pour tout $j \neq n$, $Q^{(j)}(0) = 0$. Que vaut $Q^{(n)}(0)$?

5) Montrer que $P^{(j)}(0) = 0$ pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$. Calculer $P^{(j)}(0)$ pour tout $j \in [\![n, 2n]\!]$.

6) En déduire que $F(0)$ est un entier relatif.

7) On pose $S(X) = P(\pi - X)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad S(x) = P(x)$.

8) Exprimer $S^{(2k)}$ en fonction de $P^{(2k)}$, pour $k \in \mathbb{N}$.

9) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(\pi - x) = F(x)$, puis que $F(\pi)$ est un entier relatif.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{n!} \, x^n \, (a - bx)^n \, \sin x \, \mathrm{d}x$.

10) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est un entier strictement positif.

11) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

12) Conclure.

— FIN —