Devoir à la maison n° 9

À rendre le 19 décembre

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

1) Déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser, le cas échéant, sa limite.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose,

$$v_n = \frac{1}{2^n}\ln u_n.$$

a) Prouver que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

b) En déduire que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant v_{n+k+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right).$$

c) En déduire la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel, que l'on choisit d'écrire comme un logarithme, *i.e.* $\ln\alpha$ avec $\alpha > 0$.

3) **a)** Déterminer un encadrement de $\ln\alpha - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leqslant \alpha^{2^n} \leqslant 1 + u_n.$$

c) Comparer α et 1.

d) En déduire la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\alpha^{2^n}}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\delta_n = \alpha^{2^n} - u_n$.

a) Montrer que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_n = \frac{1}{2} + \frac{\delta_{n+1} + \delta_n^2 - \delta_n}{2}\alpha^{-2^n}.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n < 1$.

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left\lfloor \alpha^{2^n} \right\rfloor$.

d) Montrer enfin que la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

— **FIN** —