Devoir à la maison n° 8

À rendre le 7 décembre

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs entiers naturels de n. On pourra noter $\mathscr{D}^+(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n : d_n est donc le nombre d'éléments de $\mathscr{D}^+(n)$.

1) Donner d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6.

2) Diviseurs communs au produit de deux entiers. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$.

- **a)** Montrer que les diviseurs positifs de ab sont exactement les produits d'un diviseur positif de a par un diviseur positif de b.
- **b)** Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors chaque diviseur positif de ab s'écrit de manière unique comme le produit d'un diviseur positif de a par un diviseur positif de b.
- **c)** Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $d_{ab} = d_a d_b$.
- **d)** L'implication précédente est-elle en fait une équivalence ?

3) Quelques caractérisations.

- **a)** Caractériser les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $d_n = 2$.
- **b)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $d_n = 3$ si et seulement si n est le carré d'un nombre premier.

4) Soit p un nombre premier et $k \in \mathbb{N}$. Que vaut d_{p^k} ?

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ayant q diviseurs premiers distincts $p_1, \dots, p_q$, dont on écrit la décomposition en facteurs premiers :

$$n = p_1^{\nu_1} \times \cdots \times p_q^{\nu_q}.$$

Montrer que $d_n = (\nu_1 + 1) \times \cdots \times (\nu_q + 1) = \prod_{k=1}^{q} (\nu_k + 1)$.

6) Encore d'autres caractérisations.

- **a)** Caractériser les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $d_n = 4$.
- **b)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que d_n est impair si et seulement si n est un carré parfait (carré d'un nombre entier).

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\prod_{d \in \mathscr{D}^+(n)} d = (\sqrt{n})^{d_n}.$$

8) Applications.

- **a)** Combien 4680 possède-t-il de diviseurs positifs ?
- **b)** Trouver le plus grand nombre n'ayant pas de diviseur premier supérieur strictement à 5 et ayant exactement 455 diviseurs positifs.
- **c)** Quel est le plus petit entier naturel ayant exactement 17 diviseurs positifs ? Et 21 diviseurs positifs ?

— **FIN** —