Devoir à la maison n° 7

À rendre le 26 novembre

I. Puissances d'une matrice et suites récurrentes

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrr} x_{n+1} & = & -9x_n & -18y_n \\ y_{n+1} & = & 6x_n & +12y_n \end{array} \right. ,$$

avec $x_0 = -137$ et $y_0 = 18$. On se propose dans ce problème de trouver les termes généraux de ces deux suites.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1) Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.

2) Trouver par récurrence une expression de U_n en fonction notamment de A et de U_0.

3) On pose $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle inversible ? Si c'est le cas, donner son inverse.

4) Que vaut $P^{-1}AP$? Dans la suite, on notera $D = P^{-1}AP$.

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

6) Exprimer D^n en fonction de n.

7) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

8) Donner les termes généraux x_n et y_n.

II. Borne supérieure et point fixe

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. On veut montrer que f possède un point fixe, *i.e.* qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $f(t) = t$.

1) On note $T = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leqslant x\}$.

- **a)** Montrer que T possède une borne inférieure, notée t.
- **b)** Montrer que $f(T) \subset T$.
- **c)** Montrer que $f(t)$ minore T.
- **d)** Déduire de tout ceci que $f(t) = t$.

2) Ce résultat est-il toujours vrai :

- **a)** pour $f :]0,1] \to]0,1]$ croissante ?
- **b)** pour $f : [0,1[\to [0,1[$ croissante ?

— FIN —