Devoir à la maison n° 6

À rendre le 12 novembre

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On note φ l'application

$$\varphi \ : \ \begin{cases} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{cases}.$$

A. On veut montrer que φ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

1. On suppose que φ est injective, mais que $A \cup B \neq E$.
   a. Calculer $\varphi(\varnothing)$.
   b. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $x \notin A$ et $x \notin B$.
   c. Que vaut $\varphi(\{x\})$? Conclure.
2. On suppose que $A \cup B = E$. Soit $X, Y \in \mathscr{P}(E)$ tel que $\varphi(X) = \varphi(Y)$.
   a. Soit $x \in E$. Montrer que $x \in A$ ou $x \in B$.
   b. Soit $x \in X$. Montrer que si $x \in A$, on a aussi $x \in Y$, et qu'il en est de même si $x \in B$. Que peut-on en conclure ?
   c. Achever la démonstration en montrant que $X = Y$.

B. On veut maintenant montrer que φ est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

3. On suppose que φ est surjective. En utilisant que $(A, \varnothing)$ a un antécédent par φ, montrer que $A \cap B = \varnothing$.
4. On suppose maintenant que $A \cap B = \varnothing$. Soient $A' \subset A$ et $B' \subset B$. Trouver un antécédent de (A', B') par φ s'exprimant de manière très simple en fonction de A' et B', et conclure.

— FIN —