Devoir à la maison n° 5

À rendre le 5 novembre

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- f est continue ;
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = xf(y) + yf(x)$.

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un élément de $\mathscr{E}$.

a) Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.

b) En déduire que $f(-1) = 0$.

c) Montrer que f est impaire.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un élément de $\mathscr{E}$. On suppose dans cette partie uniquement que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xf'(x) - f(x) = f'(1)x.$$

b) Soit $k \in \mathbb{R}$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$xy' - y = kx. \tag{1}$$

c) En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{R}$, il existe une unique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ élément de $\mathscr{E}$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $f'(1) = k$.

3) Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'unique élément de $\mathscr{E}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $f'(1) = 1$.

a) La fonction f_1 est-elle dérivable en 0 ? (*on étudiera la limite en 0^+ du taux d'accroissement de f_1 en 0.*)

b) Étudier les variations de f_1.

c) Donner l'allure du graphe de f_1 (unité de longueur : 4 centimètres). On fera notamment attention au comportement de f_1 au voisinage de 0 et l'on tracera les tangentes remarquables à sa courbe.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un élément de $\mathscr{E}$, que l'on suppose juste continue. Soit F l'unique primitive de f s'annulant en 0.

a) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ F(xy) = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x).$$

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire $\mathscr{E}$.

— FIN —