Devoir à la maison n° 3

À rendre le 1 octobre

On étudie dans ce problème les fonctions

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \tan^2(t) \end{array} \right. ,$$

$$g : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$$

et

$$h : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x}\right).$$

1) Déterminer le domaine de définition de g et de h.

2) Étudier les variations de f.

3) Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.

4) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (faire figurer les tangentes ou asymptotes remarquables).

5) Montrer que quel que soit $x \geqslant 0$, il existe un unique $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = f(t)$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Exprimer le réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = f(t)$ en fonction de x au moyen des fonctions usuelles.

7) Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

8) On considère $x \geqslant 0$ et l'unique réel t correspondant obtenu à la question **6)**.
Écrire $g(x)$ en fonction de t, et simplifier cette expression. En déduire que les fonctions g et h sont égales sur l'intersection de leurs ensembles de définition.

9) Étudier les variations de h.

10) Déterminer les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de h.

11) Tracer la courbe représentative de h dans un repère orthonormé.

— **FIN** —