Devoir à la maison n° 2

À rendre le 19 septembre

Le concours universitaire William Lowell Putnam Mathematical Competition est un concours mathématique annuel prestigieux ouvert aux étudiants des universités et institutions universitaires des États-Unis et du Canada.
La question B-5 posée lors de l'édition 2020 était :

For $j \in \{1,2,3,4\}$, let z_j be a complex number with $|z_j| = 1$ and $z_j \neq 1$
Prove that $3 - z_1 - z_2 - z_3 - z_4 + z_1 z_2 z_3 z_4 \neq 0$

On se propose ici de donner une solution à cette question.

1) Justifier que, pour chaque $k \in [\![1;4]\!]$, il existe un **réel** x_k tel que $z_k = \dfrac{x_k - \mathrm{i}}{x_k + \mathrm{i}}$. On précisera la valeur de x_k en fonction de z_k

2) On pose alors $P(X) = \prod_{k=1}^{4} (X - x_k)$. En développant $P(X)$ on peut écrire

$$P(X) = X^4 - \sigma_1 X^3 + \sigma_2 X^2 - \sigma_3 X + \sigma_4$$

a) Exprimer σ_1 et σ_2 à l'aide des $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant 4}$.

b) Montrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, on a

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{x - x_k}$$

On admet que l'on peut remplacer x par un complexe z dans cette égalité, avec, bien entendu, $P'(z) = 4z^3 - 3\sigma_1 z^2 + 2\sigma_2 z - \sigma_3$

3) Exprimer $\prod_{k=1}^{4} z_k$ à l'aide de $P(\mathrm{i})$ et de $P(-\mathrm{i})$.

4) Exprimer $\sum_{k=1}^{4} z_k$ a l'aide de $P'(-\mathrm{i})$ et de $P(-\mathrm{i})$ (on remarquera que $z_k = 1 - \dfrac{2\mathrm{i}}{x_k + \mathrm{i}}$).

5) En déduire que

$$3 + \prod_{k=1}^{4} z_k - \sum_{k=1}^{4} z_k = \frac{8 - 4\sigma_2 - 4\mathrm{i}\sigma_1}{P(-i)}$$

6) Soit $S_2 = \sum_{k=1}^{4} x_k^2$. En calculant σ_1^2, exprimer S_2 à l'aide de σ_1 et σ_2.

7) Conclure.

8) Que dire si les $(z_k)_{1 \leqslant k \leqslant 4}$ sont tous de module 1 et que $3 + \prod_{k=1}^{4} z_k - \sum_{k=1}^{4} z_k = 0$?

— FIN —