VIII - Arbres binaires

15 avril 2024

1 Présentation et vocabulaire

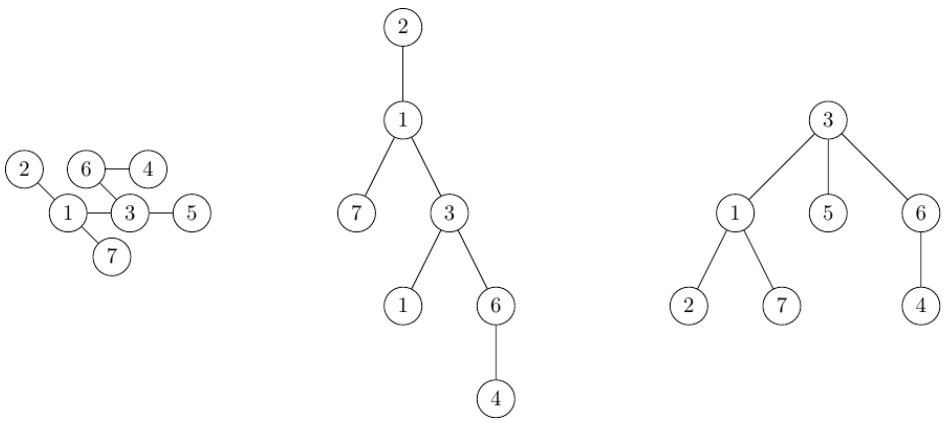
1.1 Généralités

Un *arbre* est une structure de données particulière, extrêmement riche. Vous l'avez déjà rencontrée, par exemple avec les arbres généalogiques, les tableaux d'un tournoi à élimination directe, l'organisation en arborescence des répertoires et fichiers dans un ordinateur etc ...

Plus mathématiquement, un arbre est la donnée d'un *graphe connexe acyclique non orienté* et d'un sommet r de ce graphe appelé *racine* de l'arbre. Pour chaque sommet s du graphe, il existe alors un et un seul chemin de r à s.

- Un graphe est un ensemble de sommets reliés ou non par des arêtes ;
- Simple : il n'existe pas d'arête reliant un sommet à lui-même, et deux sommets distincts sont reliés par ue arête au plus ;
- Acyclique : il n'existe pas de chemin fermé (c'est-à-dire de boucle) constitué d'arêtes ;
- Connexe : deux sommets distincts sont reliés par un chemin (unique en vertu des propriétés précédentes).

Étant donné un arbre simple, acyclique et connexe, n'importe quel sommet peut être choisi comme racine. Ce choix de la racine induit alors une orientation implicite de l'arbre, du haut vers le bas. En informatique, les arbres sont représentés la tête en bas !



Dans le premier arbre de ce cours, le sommet 1 est la *racine* de l'arbre. Dans la figure juste au-dessus, nous voyons deux enracinements différents d'un même arbre.

Les sommets d'un arbre sont appelés des *nœuds*. Lorsqu'une arête mène du nœud i au nœud j, on dit que i est le *père* de j et que j est un *fils* de i.

La racine n'a pas de père, les autres nœuds possèdent un et un seul père. Un nœud peut avoir aucun, un seul ou plusieurs fils. L'*arité* d'un nœud est le nombre de fils de ce nœud.

Un nœud qui ne possède aucun fils est appelé une *feuille* de l'arbre. Un nœud qui possède au moins un fils est appelé un *nœud interne*.

La *profondeur* d'un nœud est sa distance par rapport à la racine. La *hauteur* d'un arbre est la profondeur maximale de ses nœuds.

Enfin, chaque nœud est la racine d'un arbre constitué de lui-même et de sa descendance : on parle alors de *sous-arbre* de l'arbre initial.

Exemple Pour l'arbre précédent : * Les feuilles de l'arbre sont les nœuds 2, 4, 5, 6, 8, 10. * L'arité du nœud 1 est 3, celle du nœud 7 est 2. * La profondeur du nœud 3 est 1, celle du nœud 9 est 2. * La hauteur de l'arbre est 3. * Le sous-arbre associé au nœud 3 est :

À un arbre, on peut attacher différents types de structure de données, et *étiquetant* les feuilles, ou les noeuds, ou les arêtes, ou une combinaison de tout cela, c'est-à-dire en attachant un objet aux feuilles, noeuds, arêtes.

1.2 Arbres binaires

On appelle *arbre binaire strict* un arbre dans lequel l'arité de tous les nœuds internes est exactement 2. Chaque nœud interne possède alors un *fils gauche* et un *fils droit*.

Un arbre est alors soit une feuille, soit un nœud possédant un fils gauche et un fils droit.

En étiquetant les nœuds internes et les feuilles avec des étiquettes de types différents, on en déduit le type suivant :

[1] :
```
type ('a, 'b) abs =
  | Feuille of 'a
  | Noeud_interne of 'b * ('a, 'b) abs * ('a, 'b) abs
 ; ;
```

[1] :
```
type ('a, 'b) abs =
    Feuille of 'a
  | Noeud_interne of 'b * ('a, 'b) abs * ('a, 'b) abs
```

[2] :
```
let arbre = Noeud_interne ([|5 ; 2|],
                Feuille 1,
                Noeud_interne ([|8 ; 6 ; 1|], Feuille 6, Feuille 23)
                ) ; ;
```

[2] :
```
val arbre  : (int, int array) abs =
  Noeud_interne ([|5 ; 2|], Feuille 1,
   Noeud_interne ([|8 ; 6 ; 1|], Feuille 6, Feuille 23))
```

On parle dans ce cas d'arbre *hétérogène*.

Exemple

[3] :
```
let arbre = Noeud_interne ('*',
                  Noeud_interne ('+',
                         Feuille 3,
                         Feuille 5),
```

```
                    Feuille 4
                )
;;
```

```
[3] : val arbre  : (int, char) abs =
        Noeud_interne ('*', Noeud_interne ('+', Feuille 3, Feuille 5), Feuille 4)
```

Plus généralement, un *arbre binaire* est un arbre dans lequel l'arité de chaque nœud est 0, 1 ou 2. Pour définir la structure de donnée associée, il est pratique de considérer qu'un arbre peut être vide, ce qui permet par exemple de définir le type suivant :

```
[4] : type 'a arbre =
        | Vide
        | Noeud of 'a * 'a arbre * 'a arbre
;;
```

```
[4] : type 'a arbre = Vide | Noeud of 'a * 'a arbre * 'a arbre
```

— Les feuilles correspondent alors aux nœuds dont les deux fils sont vides.
— Ici, les étiquettes des feuilles et des nœuds internes sont de même type. Il s'agit donc d'un arbre *homogène*.

2 Quelques résultats sur les arbres binaires

On travaillera dans la suite avec le type défini juste au-dessus. ## Nombre de nœuds et de feuilles Les fonctions suivantes prennent en argument un arbre binaire et renvoient respectivement le nombre de nœuds et le nombre de feuilles de l'arbre.

```
[5] : let rec nb_noeuds a =
        match a with
        | Vide -> 0
        | Noeud (_, fg, fd) -> 1 + nb_noeuds fg + nb_noeuds fd
;;
```

```
[5] : val nb_noeuds  : 'a arbre -> int = <fun>
```

```
[6] : let rec nb_feuilles a =
        match a with
        | Vide -> 0
        | Noeud (_, Vide, Vide) -> 1
        | Noeud (_, fg, fd) -> nb_feuilles fg + nb_feuilles fd
;;
```

```
[6] : val nb_feuilles  : 'a arbre -> int = <fun>
```

Dans le cas d'un arbre binaire strict, on dispose du résultat suivant :

Soit $\mathcal{A}$ un arbre binaire strict (non vide). Si $\mathcal{A}$ possède n nœuds internes, alors $\mathcal{A}$ possède $n+1$ feuilles.

Démonstration : Par récurrence forte sur n.
Initialisation. Si $n = 0$, alors $\mathcal{A}$ ne comporte aucun nœud interne, donc la racine de $\mathcal{A}$ est une

feuille. Par conséquent, $\mathcal{A}$ ne comporte qu'une feuille, donc $\mathcal{A}$ possède $n+1$ feuille.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée par les arbres comportant au plus n nœuds internes. Si $\mathcal{A}$ comporte $n+1$ nœuds internes, alors sa racine r est un nœud interne. Soient n_1 le nombre de nœuds internes du fils gauche de r et n_2 le nombre de nœuds internes du fils droit de n, alors $n+1 = n_1 + n_2 + 1$, donc $n_1 \leqslant n$ et $n_2 \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence, le fils gauche de r comporte n_1+1 feuilles et le fils droit de r comporte n_2+1 feuilles, donc le nombre de feuilles de $\mathcal{A}$ est $n_1+1+n_2+1 = (n+1)+1$.

Mais, si l'on note f le nombre de feuilles et n le nombre de nœuds interne, il est aussi possible de raisonner directement en observant que le nombre de sommets ayant un père est égal à $n+f-1$ (seule la racine n'a pas de père) et que chaque père a exactement deux fils (il s'agit d'un arbre binaire strict). Or seuls les nœuds internes sont des pères, donc $2n = n+f-1$, soit $n = f-1$.

2.1 Hauteur d'un arbre

La fonction suivante prend en argument un arbre binaire et renvoie sa hauteur.

[7] :
```
let rec hauteur a =
  match a with
  | Vide -> -1
  | Noeud (_, fg, fd) -> 1 + max (hauteur fg) (hauteur fd)
 ;;
```

[7] :
```
val hauteur  : 'a arbre -> int = <fun>
```

Théorème. Soit $\mathcal{A}$ un arbre binaire de hauteur h et comportant n nœuds.

Alors $h+1 \leqslant n \leqslant 2^{h+1}-1$.

Démonstration : Immédiat pour $h = -1$.

Pour $h \in \mathbb{N}$, par récurrence forte sur h.

— **Initialisation.** Si $\mathcal{A}$ est de hauteur $h = 0$, alors $\mathcal{A}$ ne contient que sa racine, donc son nombre de nœuds est $n = 1$, et $h+1 \leqslant n \leqslant 2^{h+1}-1$.

— **Hérédité.** Soit $h \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété est vérifiée pour tout arbre de hauteur inférieure ou égale à h. Si $\mathcal{A}$ est de hauteur $h+1$, alors ses fils gauche et droite $\mathcal{A}_g$ et $\mathcal{A}_d$ sont de hauteur au plus h, donc comportent au plus $2^{h+1}-1$ nœuds. Par conséquent, $\mathcal{A}$ comporte au plus $2 \times (2^{h+1}-1)+1$ i.e $2^{h+2}-1$ nœuds. De plus, l'un des deux sous-arbres $\mathcal{A}_g$ et $\mathcal{A}_d$ est de hauteur exactement h donc comporte au moins $h+1$ nœuds, donc $\mathcal{A}$ comporte au moins $h+2$ nœuds.

Théorème. Soit $\mathcal{A}$ un arbre binaire de hauteur h et comportant f feuilles. Alors $f \leqslant 2^h$, donc $h \geqslant \lceil \log_2 f \rceil$.

Démonstration : Même principe

Un arbre binaire de hauteur h comportant exactement $2^{h+1}-1$ nœuds est appelé un *arbre binaire complet*. On peut prouver par l'absurde qu'un arbre binaire complet est strict et que ses feuilles ont toutes la même profondeur.

3 Parcours d'arbres binaires

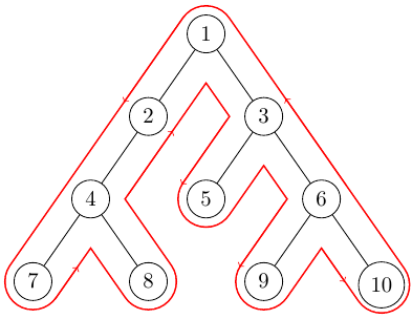
On souhaite énumérer les nœuds d'un arbre (pour stocker leurs étiquettes dans une liste ou encore pour les afficher). On distingue deux types de parcours : les parcours en *profondeur* et les parcours *en largeur*.

3.1 Parcours en profondeur

Lors d'un *parcours en profondeur* d'un arbre binaire non vide, comportant donc une racine et deux sous-arbres, chacun de ces sous-arbres est parcouru en entier avant de parcourir le sous-arbre suivant.

On distingue trois types de parcours en profondeur : * le *parcours préfixe* : on parcourt la racine r, puis son fils gauche $\mathcal{A}_g$, puis son fils droit $\mathcal{A}_d$; * le *parcours infixe* : on parcourt le fils gauche, puis r, puis le fils droit ; * le *parcours postfixe* : on parcourt le fils gauche, puis le fils droit, puis r.

Dans l'arbre suivant, en partant de la racine 1 et en suivant les flèches :



— **Parcours préfixe :** on regarde le premier passage à gauche d'un noeud : 1 2 4 7 8 3 5 6 9 10
— **Parcours infixe :** on regarde le premier passage sous un noeud : 7 4 8 2 1 5 3 9 6 10
— **Parcours postfixe :** on regarde le premier passage à droite d'un noeud : 7 8 4 2 5 9 10 6 3 1

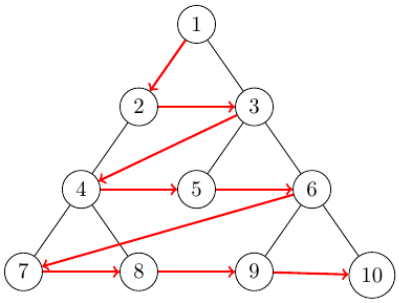
Remarque : Dans le cas d'un arbre représentant une expression arithmétique, les parcours préfixe et postfixe correspondent respectivement aux représentations préfixe et postfixe de l'expression ; la notation postfixée est aussi appelée notation *polonaise inversée*.

Exercice 1 Écrire des fonctions `parcours_prefixe : 'a arbre -> 'a list`, `parcours_infixe : 'a arbre -> 'a list` et `parcours_postfixe : 'a arbre -> 'a list`, prenant en argument un arbre et renvoyant la liste de ses étiquettes construite par chacun des trois parcours en profondeur.

3.2 Parcours en largeur

Le *parcours en largeur* consiste à parcourir les nœuds par profondeur croissante, de gauche à droite.

Dans le cas de l'arbre précédent, le parcours en largeur serait : 1-2-3-4-5-6-7-8-9-10.



Exercice 2

1) Écrire une fonction `racines` qui à une liste d'arbres binaires `l` renvoie la liste des racines des arbres de `l`.
2) Écrire une fonction `fils` qui à une liste d'arbres binaires `l` renvoie la liste des fils des racines des arbres de `l` (peu importe l'ordre dans lequel ces fils sont renvoyés).
3) Écrire une fonction `parcours_largeur : 'a arbre -> 'a list`, prenant en argument un arbre et renvoyant la liste de ses étiquettes construite par un parcours en largeur.

4 Exercices

Exercice 3 La numérotation de Sosa-Stradonitz d'un arbre binaire strict, utilisée pour identifier des individus dans une généalogie ascendante, consiste à numéroter les nœuds d'un arbre suivant les règles suivantes :

— La racine porte le numéro 1 ;
— Si un nœud porte le numéro n, alors son fils gauche porte le numéro $2n$ et son fils droit le numéro $2n + 1$.

1. Montrer que deux nœuds distincts ne peuvent pas porter le même numéro.
2. Montrer que les nœuds de profondeur p portent des numéros compris entre 2^p et $2^{p+1} - 1$.
3. Déterminer la profondeur d'un nœud de numéro n.
4. Écrire une fonction `arbre_binaire_complet : int -> int arbre` prenant en argument un entier h et renvoyant un arbre binaire complet de hauteur h dont les étiquettes correspondent à la numérotation de Sosa-Stradonitz.
5. Écrire une fonction `numeroter :'a arbre -> ('a * int) arbre` qui prend en argument un arbre et qui renvoie l'arbre obtenu en numérotant ses nœuds.

Exercice 4 On représente les arbres binaires à étiquettes entières par le type :

Exercice 5 En choisissant un type d'arbres adapté, écrire une fonction prenant en argument un arbre d'expression arithmétique sur des entiers et renvoyant la valeur associée à l'expression.