Feuille d'exercice n° 8 : **Logique propositionnelle**

Exercice 1 Résoudre l'inéquation de complexité

$$C(n) \leqslant C(\lfloor n/3 \rfloor) + C(\lceil n/3 \rceil) + O(n^2)$$

Exercice 2 Résoudre l'inéquation de complexité

$$C(n) \leqslant \max\left(C\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right), C\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right)\right) + O(1)$$

Exercice 3

Vous êtes l'ambassadeur de la fédération des planètes unies auprès d'une civilisation extra-terrestre particulièrement susceptible. Il est extrêmement important de respecter leur protocole en ce qui concerne la couleur des vêtements. Pour éviter les incompréhensions, vous disposez d'un assistant de la dernière génération d'intelligence artificielle bio-électronique qui contient toutes les informations disponibles sur leur culture. Mais celui-ci semble perturbé depuis votre arrivée. Il vous donne maintenant des indications sous la forme d'énigmes. Vous avez constaté qu'il vous communiquait systématiquement trois affirmations dont exactement l'une des trois est correcte et les deux autres fausses.

Nous noterons A_1, A_2 et A_3 les propositions associées aux trois affirmations communiquées par votre assistant.

1) Représenter cette règle sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant de A_1, A_2 et A_3.

Vous devez d'abord rencontrer le gouverneur de la capitale qui est le seul à pouvoir vous obtenir un contact avec le conseil des sages. Votre assistant vous donne les indications suivantes :

- Porte au moins un vêtement de couleur claire, mais aucun vêtement de couleur sombre !
- Si tu portes au moins un vêtement de couleur claire alors ne porte aucun vêtement de couleur sombre !
- Ne porte aucun vêtement de couleur sombre !

Nous noterons C, respectivement S, les variables propositionnelles correspondant au fait de porter au moins un vêtement de couleur claire, respectivement sombre.

2) Exprimer A_1, A_2 et A_3 sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant de C et de S.

3) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les formules de De Morgan), déterminer quelle(s) couleur(s) de vêtement vous devez porter pour rencontrer le gouverneur.

Grâce à ces conseils avisés, vous obtenez un rendez-vous avec le conseil. Vous disposez de vêtements de couleur rouge, verte et bleue. Votre assistant vous transmet ses conseils mais la communication est brouillée juste à la fin et vous ne pouvez plus le contacter avant l'heure du rendez-vous. Voici ce que vous avez réussi à comprendre :

- Ne porte un vêtement de couleur rouge que si tu portes aussi un vêtement de couleur bleue !
- Si tu ne portes pas de vêtement de couleur verte alors ne porte pas de vêtement de couleur bleue !
- Porte au moins un vêtement de couleur bleue ou de couleur ... !

Nous noterons R, V et B les variables propositionnelles correspondant au fait de porter au moins un vêtement de couleur rouge, verte et bleue.

4) Exprimer A_1, A_2 et A_3 sous la forme de formules du calcul des propositions dépendant de R, V et B.

5) En utilisant le calcul des propositions (résolution avec les tables de vérité), déterminer quelle(s) couleur(s) de vêtement vous devez porter pour votre entrevue avec le conseil des sages.

Exercice 4 Dans la suite, les variables propositionnelles seront notées $x_1, x_2 \ldots$. Les connecteurs propositionnels $\wedge$ (conjonction), $\vee$ (disjonction), $\Rightarrow$ (implication) et $\Leftrightarrow$ (équivalence) seront classiquement utilisés. De même, la négation d'une variable propositionnelle x_i (respectivement d'une formule $\mathcal{F}$) sera notée $\neg x_i$ (resp. $\neg \mathcal{F}$).

Définitions

Définition 1. Soit $(x_1 \cdots x_n)$ un ensemble de n variables propositionnelles.

— On appelle minterme toute formule de la forme $y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots y_n$ où pour tout $i \in \{1, \cdots, n\} y_i$ est un élément de $\{x_i, \neg x_i\}$.

— On appelle maxterme toute formule de la forme $y_1 \vee y_2 \vee \cdots y_n$ où pour tout $i \in \{1, \cdots, n\} y_i$ est un élément de $\{x_i, \neg x_i\}$.

Les mintermes (respectivement maxtermes) $y_1 \wedge y_2 \wedge \cdots y_n$ et $y'_1 \wedge y'_2 \wedge \cdots y'_n$ (resp $y_1 \vee y_2 \vee \cdots y_n$ et $y'_1 \vee y'_2 \vee \cdots y'_n$) sont considérés identiques si les ensembles $\{y_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\{y'_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ le sont.

1) Donner l'ensemble des mintermes et des maxtermes sur l'ensemble (x_1, x_2).

Définition 2 (Formes normales conjonctives et disjonctives).

Soit $\mathcal{F}$ une formule propositionnelle qui s'écrit à l'aide de n variables propositionnelles $(x_1 \cdots x_n)$.

— On appelle forme normale conjonctive de $\mathcal{F}$ toute conjonction de maxtermes logiquement équivalente à $\mathcal{F}$.

— On appelle forme normale disjonctive de $\mathcal{F}$ toute disjonction de mintermes logiquement équivalente à $\mathcal{F}$.

Définition 3 (Système complet).

Un ensemble de connecteurs logiques C est un système complet si toute formule propositionnelle est équivalente à une formule n'utilisant que les connecteurs de C.

Par définition, $C = \{\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ est un système complet.

Le connecteur de Sheffer

On définit le connecteur de Sheffer, ou d'incompatibilité, par $x_1 \diamond x_2 = \neg x_1 \vee \neg x_2$.

2) Construire la table de vérité du connecteur de Sheffer.

3) Exprimer ce connecteur en fonction de $\neg$ et $\wedge$.

4) Vérifier que $\neg x_1 = x_1 \diamond x_1$.

5) En déduire une expression des connecteurs $\wedge, \vee$ et $\Rightarrow$ en fonction du connecteur de Sheffer. Justifier en utilisant des équivalences avec les formules propositionnelles classiques.

6) Donner une forme normale conjonctive de la formule $x_1 \diamond x_2$.

7) Donner de même une forme normale disjonctive de la formule $x_1 \diamond x_2$.

8) Démontrer par induction sur les formules propositionnelles que l'ensemble de connecteurs $C = \{\diamond\}$ est un système complet.

9) Application : soit $\mathcal{F}$ la formule propositionnelle $x_1 \vee (\neg x_2 \wedge x_3)$. Donner une forme logiquement équivalente de $\mathcal{F}$ utilisant uniquement le connecteur de Sheffer.

Exercice 5

Nous nous intéressons dans cet exercice à l'étude de quelques propriétés de la logique propositionnelle tri-valuée. En plus des deux valeurs classiques VRAI ($\top$) et FAUX ($\perp$) que peut prendre une expression, la logique propositionnelle tri-valuée introduit une troisième valeur INDETERMINE (?) .

$\mathcal{V}$ est l'ensemble des variables propositionnelles et $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules construites sur $\mathcal{V}$. Pour $A, B \in \mathcal{V}$, les tables de vérités des opérateurs classiques dans cette logique propositionnelle sont les suivantes :

(a) $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	?	?
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	?	$\perp$
?	$\top$	?
?	$\perp$	$\perp$
?	?	?

(b) $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	?	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	?	?
?	$\top$	$\top$
?	$\perp$	?
?	?	?

(c) $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	?	?
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	?	$\top$
?	$\top$	$\top$
?	$\perp$	?
?	?	$\top$

(d) $\neg A$

A	$\neg A$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$
?	?

Définition 1 (Tri-valuation). Une tri-valuation est une fonction $f : \mathcal{V} \to \{\top, \perp, ?\}$.

On étend alors de manière usuelle la notion de tri-valuation sur l'ensemble des formules :

Définition 2 Une tri-valuation sur l'ensemble des formules est une fonction $\widehat{f} : \mathcal{F} \to \{\top, \perp, ?\}$.

Définition 3 Une tri-valuation $\widehat{f}$ satisfait une formule φ si $\widehat{f}(\varphi) = \top$. On notera alors $\widehat{f} \vdash_3 \varphi$.

Définition 4 Une formule φ est :

— une conséquence d'un ensemble de formules $\mathcal{X}$ si toute interprétation qui satisfait toutes les formules de $\mathcal{X}$ satisfait φ. On notera dans ce cas $\mathcal{X} \Vdash_3 \varphi$;

— une tautologie si pour toute tri-valuation $\widehat{f}$, $\widehat{f}(\varphi) = \top$. On notera dans ce cas $\Vdash_3 \varphi$.

1) Montrer que $A \vee \neg A$ n'est pas une tautologie.

2) Proposer alors une tautologie simple dans cette logique.
Posons $\top = 1$, $\perp = 0$ et $? = 0,5$.

3) Proposer un calcul simple permettant de trouver la table de vérité de $A \wedge B$ en fonction de A et B. Même question pour $A \vee B$.

4) En logique bi-valuée classique, les propositions $\neg A \vee B$ et $A \Rightarrow B$ sont équivalentes. Qu'en est-il dans le cadre de la logique propositionnelle tri-valuée ?

5) En écrivant les tables de vérité, indiquer si les propositions $\neg B \Rightarrow \neg A$ et $A \Rightarrow B$ sont équivalentes.

6) Donner la table de vérité de la proposition $((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$. Cette proposition est-elle une tautologie ?
Un nouvel opérateur d'implication, noté $\to$, est alors défini, dont la table de vérité est la suivante :

A	B	$A \to B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\top$	?	?
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	?	$\top$
?	$\top$	$\top$
?	$\perp$	?
?	?	?

7) $A \to A$ est-il une tautologie ?

8) Montrer qu'il n'existe aucune tautologie en utilisant uniquement cette définition de l'implication.

9) La proposition suivante est-elle vraie :

$$\text{“ } (\{A\} \Vdash_3 B) \text{ est équivalent à } (\Vdash_3 A \rightarrow B) \text{ ” ?}$$

On définit alors un type **FormuleLogique** représentant les formules de la manière suivante :

```
type Formulelogique =
| Vrai (* Constante Vrai *)
| Faux (* Constante Faux *)
| Indetermine (* Constante Indeterminé *)
| Var of string (* Variable propositionnelle *)
| Non of FormuleLogique (* N\'{e}gation d'une formule *)
| Et of FormuleLogique*FormuleLogique (* conjonction de deux
   formules *)
| Ou of FormuleLogique*FormuleLogique (* disjonction de deux
   formules *)
| Implique of FormuleLogique*FormuleLogique (* implication *)
```

10) Avec la représentation précédente, écrire en OCaml la formule :

$$((A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)) \Rightarrow B.$$

11) Écrire alors une fonction récursive OCaml **lectureFormule**, prenant en argument une formule et renvoyant une chaine de caractères spécifiant comment un lecteur lirait la formule. Ainsi, par exemple, pour $\varphi = A \wedge (\neg B)$, **lectureFormule** renvoie **A et non B**.